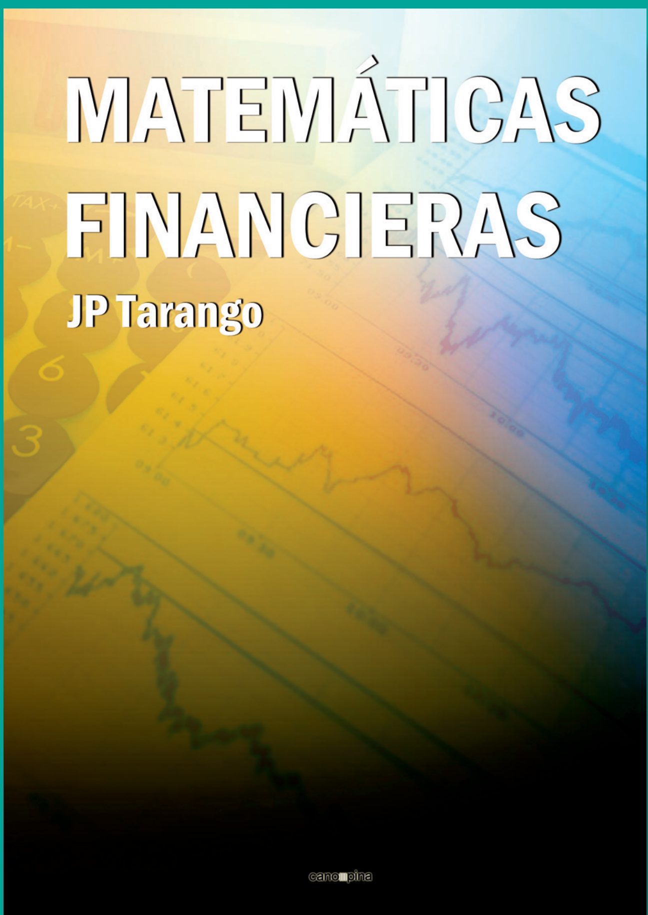
# Anexos

## ANEXO A: POTENCIAS

## ANEXO B: LOGARITMOS

## ANEXO C: PROGRESIONES



# ANEXO A: POTENCIAS

## A.1 POTENCIAS

### A.1.1 FORMA DE UNA POTENCIA

Una potencia es un producto abreviado donde siempre se multiplica el mismo factor. Su forma es la siguiente:

$$a^n$$

Donde:

*a* se denomina base y es el factor que se multiplica por si mismo.

*n* es el exponente e indica el número de veces que la base se multiplica por si misma.

***Ejemplo:***

*Calcula las siguientes potencias:*

$$3^6 = 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 = 729$$

$$7^4 = 7 * 7 * 7 * 7 = 2.401$$

$$5^7 = 5 * 5 * 5 * 5 * 5 * 5 * 5 = 78.125$$

### A.1.2 SIGNO DE UNA POTENCIA

El signo del producto final dependerá del número de veces que el factor se multiplique por si mismo. En este sentido podemos diferenciar distintos casos:

- Si la base es positiva el producto final será positivo.
- Si la base es negativa y el exponente par el producto final será positivo.
- Si la base es negativa y el exponente impar el producto final será negativo[1].

***Ejemplo:***

*Determina el signo de cada potencia:*

$$4^4 = \text{positivo}$$

$$4^4 = 4 * 4 * 4 * 4 = 256$$

$$3^7 = \text{positivo}$$

$$3^7 = 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 = 2.187$$

[1] Recuerde el lector la ley de los signos: positivo por positivo, es igual a positivo; negativo por negativo, es igual a positivo; negativo por positivo, es igual a negativo; y positivo por negativo, es igual a negativo.

$$(-9)^6 = \text{positivo}$$

$$(-9)^6 = (-9) * (-9) * (-9) * (-9) * (-9) * (-9) = 531.441$$

$$(-10)^3 = \text{negativo}$$

$$(-10)^3 = (-10) * (-10) * (-10) = -1.000$$

### A.1.3 POTENCIAS EN FUNCIÓN DEL EXPONENTE

Podemos clasificar las potencias en función de su exponente:

- Potencias con exponente entero:

$$a^n$$

- Potencias con exponente fraccionado:

$$a^{\frac{n}{m}}$$

## A.2 PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

### A.2.1 PRODUCTO DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE

El producto de dos potencias de la misma base es otra potencia de la misma base cuyo exponente es la suma de los exponentes:

$$a^n * a^m = a^{n+m}$$

***Ejemplo:***

*Calcula el producto de las siguientes potencias:*

$$5^3 * 5^7 = 5^{3+7} = 5^{10}$$

$$(-3)^6 * (-3)^7 = (-3)^{6+7} = (-3)^{13}$$

$$(-2)^9 * (-2)^5 * (-2)^4 = (-2)^{9+5+4} = (-2)^{18}$$

$$7^2 * 7^{12} * 7^5 * 7^3 = 7^{2+12+5+3} = 7^{22}$$

### A.2.2 COCIENTE DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE

El cociente de dos potencias de la misma base es otra potencia de la misma base cuyo exponente es la resta de los exponentes:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

***Ejemplo:***

*Calcula el cociente de las siguientes potencias:*

$$\frac{5^3}{5^7} = 5^{3-7} = 5^{-4}$$

$$\frac{(-3)^9}{(-3)^7} = (-3)^{9-7} = (-3)^2$$

$$\frac{2^{-5}}{2^{-3}} = 2^{-5-(-3)} = 2^{-5+3} = 2^{-2}$$

$$\frac{7^2 * 7^9}{7^4 * 7^3} = \frac{7^{2+9}}{7^{4+3}} = \frac{7^{11}}{7^7} = 7^{11-7} = 7^4$$

## A.2.3 POTENCIA DE UN PRODUCTO

La potencia de un producto es igual al producto de las potencias:

$$(a * b)^n = a^n * b^n$$

***Ejemplo:***

*Expresa en forma de producto de potencias las siguientes expresiones:*

$$(4 * 3)^5 = 4^5 * 3^5$$

$$(5 * 7 * 3)^4 = 5^4 * 7^4 * 3^4$$

$$6^5 = (2 * 3)^5 = 2^5 * 3^5$$

$$165^3 = (3 * 5 * 11)^3 = 3^3 * 5^3 * 11^3$$

## A.2.4 POTENCIA DE UN COCIENTE

La potencia de un cociente es igual al cociente de la división entre la potencia del dividendo y la del divisor:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

***Ejemplo:***

*Expresa en forma de cociente de potencias las siguientes expresiones:*

$$\left(\frac{5}{7}\right)^6 = \frac{5^6}{7^6}$$

$$\left(\frac{11}{13 * 17}\right)^5 = \frac{11^5}{(13 * 17)^5} = \frac{11^5}{13^5 * 17^5}$$

$$0{,}5^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3}$$

$$\left(\frac{11}{7}\right)^{-2} = \frac{11^{-2}}{7^{-2}}$$

## A.2.5 POTENCIA DE UNA POTENCIA

Una potencia elevada a un exponente es igual a otra potencia con la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes:

$$(a^n)^m = a^{n * m}$$

***Ejemplo:***

*Calcula las siguientes potencias de potencias:*

$$\left(5^{3}\right)^{2} = 5^{6}$$

$$\left(13^{5}\right)^{-3} = 13^{-15}$$

$$\left(7^{-4}\right)^{-5} = 7^{20}$$

$$\left[\left(\frac{3}{5 \ast 4}\right)^{5}\right]^{2} = \left(\frac{3}{5 \ast 4}\right)^{10} = \frac{3^{10}}{5^{10} \ast 4^{10}}$$

## A.2.6 POTENCIA CON EXPONENTE NEGATIVO

Una base elevada a un exponente negativo será igual a la inversa de la base elevada al mismo exponente con signo positivo:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$$

***Ejemplo:***

*Resuelve las siguientes expresiones con exponente negativo:*

$$\left(4^{3}\right)^{-2} = 4^{-6} = \frac{1}{4^{6}}$$

$$\left[(2 \ast 3)^{5}\right]^{-3} = (2 \ast 3)^{-15} = \frac{1}{(2 \ast 3)^{15}} = \frac{1}{2^{15} \ast 3^{15}}$$

$$\left[\left(3^{-2}\right)^{-2}\right]^{-3} = \left(3^{4}\right)^{-3} = 3^{-12} = \frac{1}{3^{12}}$$

$$\frac{2^{-5}}{2^{3}} = 2^{-5-3} = 2^{-8} = \frac{1}{2^{8}}$$

## A.2.7 POTENCIA CON EXPONENTE FRACCIONADO

Una potencia con el exponente fraccionado es igual a un radical donde el denominador de la fracción es el grado de la raíz y el numerador el exponente del radicando:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^{n}}$$

***Ejemplo:***

*Transforma en potencias las siguientes expresiones:*

$$\sqrt[3]{5^{6}} = \left(5^{6}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^{2}$$

$$\sqrt[4]{\frac{7^{6}}{7^{2}}} = \sqrt[4]{7^{6-2}} = \sqrt[4]{7^{4}} = \left(7^{4}\right)^{\frac{1}{4}} = 7^{\frac{4}{4}} = 7^{1}$$

$$\sqrt[5]{\left(\frac{9}{3}\right)^{2}} = \sqrt[5]{\frac{9^{2}}{3^{2}}} = \sqrt[5]{\frac{\left(3^{2}\right)^{2}}{3^{2}}} = \sqrt[5]{\frac{3^{4}}{3^{2}}} = \sqrt[5]{3^{4-2}} = \sqrt[5]{3^{2}} = \left(3^{2}\right)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{2}{5}}$$

$$\sqrt[3]{3^{-5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3^5}} = \left(\frac{1}{3^5}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1^{\frac{1}{3}}}{\left(3^5\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{3}}}$$

## A.2.8 POTENCIA CON EXPONENTE CERO

Cualquier base elevada al exponente cero es igual a la unidad:

$$a^0 = 1$$

***Ejemplo:***

*Resuelve las siguientes expresiones:*

$$5^0 = 1$$

$$\left(3^2\right)^0 = 3^{2*0} = 3^0 = 1$$

$$\left[(3 * 2)^{-2}\right]^0 = (3 * 2)^{-2*0} = (3 * 2)^0 = 1$$

$$\sqrt[3]{5^0} = \left(5^0\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{0}{3}} = 5^0 = 1$$

## A.2.9 POTENCIA CON EXPONENTE UNO

Cualquier base elevada a la unidad es igual a la base:

$$a^1 = a$$

***Ejemplo:***

*Resuelve las siguientes expresiones:*

$$1.233^1 = 1.233$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{3}{5}$$

$$(3 * 2)^1 = (3 * 2)$$

$$\frac{7^5}{7^4} = 7^{5-4} = 7^1 = 7$$

## A.2.10 PRODUCTOS NOTABLES

El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero, más el doble del primero por el segundo y más el cuadrado del segundo.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 * a * b + b^2$$

***Ejemplo:***

*Resuelve la siguiente expresión:*

$$(5 + 3)^2 = 5^2 + 2 * 5 * 3 + 3^2$$

$$8^2 = 5^2 + 30 + 3^2$$

$$64 = 25 + 30 + 9$$

$$64 = 64$$

El cuadrado de la resta de dos números es igual al cuadrado del primero, menos el doble del primero por el segundo y más el cuadrado del segundo.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 * a * b + b^2$$

***Ejemplo:***

*Resuelve la siguiente expresión:*

$$(5 - 3)^2 = 5^2 - 2 * 5 * 3 + 3^2$$

$$2^2 = 5^2 - 30 + 3^2$$

$$4 = 25 - 30 + 9$$

$$4 = 4$$

La suma por diferencia de dos números es igual a la diferencia de cuadrados.

$$(a + b) * (a - b) = a^2 - b^2$$

***Ejemplo:***

*Resuelve la siguiente expresión:*

$$(5 + 3) * (5 - 3) = 5^2 - 3^2$$

$$8 * 2 = 25 - 9$$

$$16 = 16$$

# ANEXO B: LOGARITMOS

## B.1 DEFINICIÓN DE LOGARITMO

El logaritmo de un número en una base b, mayor que la unidad, es el exponente al que hay que elevar la base para obtener el número. Su expresión matemática es la siguiente:

$$\log_b x = a \Leftrightarrow b^a = x \qquad \text{con } b > 1$$

***Ejemplo:***

---

- $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$
- $\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$
- $\log_5 \frac{1}{25} = -2 \Leftrightarrow 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$
- $\log_7 1 = 0 \Leftrightarrow 7^0 = 1$

## B.2 PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

### B.2.1 LOGARITMO DE UN PRODUCTO

El logaritmo de un producto es igual a la suma de logaritmos:

$$\log_b x * y = \log_b x + \log_b y$$

***Ejemplo:***

---

*Calcula:*

$$x = \log_{10} 4 + \log_{10} 25$$

$$x = \log_{10} (4 * 25) = \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2$$

### B.2.2 LOGARITMO DE UN COCIENTE

El logaritmo de un cociente es igual a la resta de logaritmos:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

***Ejemplo:***

---

*Calcula:*

$$x = \log_2 800 - \log_2 100$$

$$x = \log_2 \frac{800}{100} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$$

### B.2.3 LOGARITMO DE UNA POTENCIA

El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_b x^n = n * \log_b x$$

***Ejemplo:***

---

*Calcula:*

$$x = 2 * \log_5 10 - 2 * \log_5 2$$

$$x = \log_5 10^2 - \log_5 2^2 = \log_5 100 - \log_5 4 = \log_5 \frac{100}{4} = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$$

### B.2.4 LOGARITMO DE UNA RAÍZ

El logaritmo de una raíz es igual a la inversa del exponente de la raíz por el logaritmo del radicando:

$$\log_b \sqrt[n]{x} = \log_b x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} * \log_b x$$

***Ejemplo:***

---

*Calcula:*

$$x = \sqrt{\log_2 32^2}$$

$$x = \left(\log_2 32^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} * \log_2 32^2 = \frac{1}{2} * \log_2 \left(2^5\right)^2 = \frac{1}{2} * \log_2 2^{10} = \frac{10}{2} * \log_2 2 = 5 * 1 = 5$$

## B.3 BASES MÁS FRECUENTES

El logaritmo de un número dependerá de la base utilizada. Las bases más frecuentes son 10 y el número e. Un logaritmo con base 10 recibe el nombre de decimal, vulgar o de Briggs, mientras que los que emplean como base el número e se denominan neperianos o naturales.

### B.3.1 LOGARITMO DECIMAL

Los logaritmos decimales son aquellos cuya base es 10 y su expresión matemática es:

$$\log_{10} x = a \Leftrightarrow 10^a = x$$

Dado que es una base muy utilizada suele simplificarse su expresión no especificando dicha base:

$$\log x = a \Leftrightarrow 10^a = x$$

***Ejemplo:***

---

- $\log 10 = 1 \Leftrightarrow 10^1 = 10$
- $\log 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100$
- $\log 10.000 = 4 \Leftrightarrow 10^4 = 10.000$
- $\log 1 = 0 \Leftrightarrow 10^0 = 1$

- $\log 0{,}1 = -1 \Leftrightarrow 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

## B.3.2 LOGARITMO NEPERIANO

Los logaritmos neperianos son aquellos cuya base es el número e y su expresión matemática es:

$$\log_e x = a \Leftrightarrow e^a = x$$

También pueden representarse de la siguiente forma:

$$\ln x = a \Leftrightarrow e^a = x$$

o

$$L\,x = a \Leftrightarrow e^a = x$$

El número e tiene gran importancia en las matemáticas y su valor es 2,7182818284 590452353602874.

***Ejemplo:***

- $\ln 1 = 0 \Leftrightarrow e^0 = 1$
- $\ln e^2 = 2 \Leftrightarrow e^2 = e^2$
- $\ln e^{10} = 10 \Leftrightarrow e^{10} = e^{10}$
- $\ln e^{-1} = -1 \Leftrightarrow e^{-1} = e^{-1}$

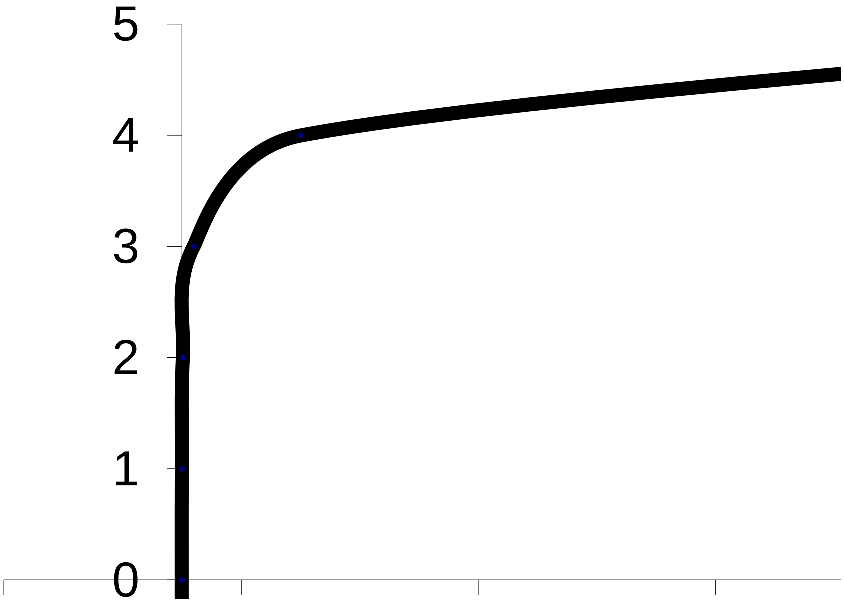
# B.4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN LOGARITMO

Para representar la función logarítmica vamos a utilizar los logaritmos en base 10:

$$\log_{10} x$$

| x | $b^a$ | a |
|---|---|---|
| 1 | $10^0$ | 0 |
| 10 | $10^1$ | 1 |
| 100 | $10^2$ | 2 |
| 1.000 | $10^3$ | 3 |
| 10.000 | $10^4$ | 4 |
| 100.000 | $10^5$ | 5 |
| $\frac{1}{10}$ | $10^{-1}$ | -1 |
| $\frac{1}{100}$ | $10^{-2}$ | -2 |
| $\frac{1}{1.000}$ | $10^{-3}$ | -3 |

Si representamos estos valores obtenemos un gráfico como el siguiente:



# ANEXO C: PROGRESIONES

## C.1 SUCESIÓN

Una sucesión es un conjunto de números ordenados. Denominamos término de una sucesión a cada uno de los números que la forman y se representan del siguiente modo:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...$$

El subíndice de cada término determina su posición dentro de la sucesión, pero nunca su valor.

***Ejemplo:***

*Algunas sucesiones son:*

- 4, 7, 10, 13, 16, 19,... donde $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_3 = 10$, $a_4 = 13$, $a_5 = 16$, $a_6 = 19$
- 1, 3, 5, 7, 9, 11,... donde $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 9$, $a_6 = 11$
- 1, 4, 9, 16, 25, 36,... donde $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16$, $a_5 = 25$, $a_6 = 36$

Existen muchas posibles sucesiones, tantas como criterios de formación podamos imaginar. Un posible criterio sería:

$$a_n = 3 + (4 * n)$$

Aplicando la ley de formación podemos obtener los términos de la sucesión de forma ordenada:

$$a_1 = 3 + (4 * 1) = 7$$

$$a_2 = 3 + (4 * 2) = 11$$

$$a_3 = 3 + (4 * 3) = 15$$

$$a_4 = 3 + (4 * 4) = 19$$

Dicho criterio de formación se denomina término general de una sucesión. El término general es una fórmula que permite conocer el valor de cualquier término conociendo su posición dentro de la sucesión y se representa mediante $a_n$. Siguiendo con el ejemplo anterior podemos determinar el término 200:

$$a_{200} = 3 + (4 * 200) = 803$$

De todas las posibles sucesiones, nosotros nos centraremos en dos tipos con criterios de formación bien definidos:

- Progresión aritmética
- Progresión geométrica

# C.2 PROGRESIÓN ARITMÉTICA

## C.2.1 CONCEPTO

Una progresión aritmética es una sucesión de números donde cada uno de ellos (excepto el primero) se obtiene sumando al anterior una cantidad fija denominada *diferencia* y representada por la letra *d*.

***Ejemplo:***

*Son ejemplos de progresiones aritméticas:*

- 6, 10, 14, 18, 22, 26,... es un progresión aritmética con d = 4
- - 2, - 7, - 12, - 17, - 22, - 27,... es un progresión aritmética con d = - 5
- $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$, 4, $\frac{9}{2}$, 5,... es un progresión aritmética con d = $\frac{1}{2}$

## C.2.2 TÉRMINO GENERAL

Aplicando la definición de la progresión aritmética y conociendo el primer término y la diferencia, podemos deducir el término general:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + (2 * d)$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + (2 * d) + d = a_1 + (3 * d)$$

$$a_5 = a_4 + d = a_1 + (3 * d) + d = a_1 + (4 * d)$$

$$\ldots$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + d = a_1 + [(n-3) * d] + d = a_1 + [(n-2) * d]$$

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + [(n-2) * d] + d = a_1 + [(n-1) * d]$$

El término general de una progresión aritmética es:

$$a_n = a_1 + [(n-1) * d]$$

***Ejemplo:***

*Determina el término general de la progresión 4, 10, 16, 22, 28…:*

$$a_1 = 4$$

$$d = a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$$

$$a_n = a_1 + [(n-1) * d]$$

$$a_n = 4 + [(n-1) * 6]$$

***Ejemplo:***

*Determina los cuatro primeros términos de una progresión con $a_1$ = - 3 y d = 4:*

$$a_n = a_1 + [(n-1) * d]$$

$$a_n = -3 + \left[(n-1) * 4\right]$$

$$a_1 = -3 + \left[(1-1) * 4\right] = -3$$

$$a_2 = -3 + \left[(2-1) * 4\right] = 1$$

$$a_3 = -3 + \left[(3-1) * 4\right] = 5$$

$$a_4 = -3 + \left[(4-1) * 4\right] = 9$$

***Ejemplo:***

*Determina el término general de una progresión con* $a_8 = -24$ *y* $d = -4$:

$$a_n = a_1 + \left[(n-1) * d\right]$$

$$a_8 = a_1 + \left[(8-1) * -4\right]$$

$$a_8 = a_1 + \left[7 * -4\right]$$

$$a_8 = a_1 - 28$$

$$a_1 = a_8 + 28$$

$$a_1 = -24 + 28 = +4$$

$$a_n = 4 + \left[(n-1) * -4\right]$$

## C.2.3 INTERPOLACIÓN

Interpolar significa intercalar varios términos entre dos extremos, dando lugar a una progresión aritmética. Para resolver este tipo de problemas basta con despejar del término general la diferencia:

$$a_n = a_1 + \left[(n-1) * d\right]$$

$$a_n - a_1 = (n-1) * d$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

***Ejemplo:***

*Interpola cuatro términos entre 12 y 37:*

$$a_1 = 12$$

$$a_6 = 37$$

$$d = \frac{37-12}{6-1} = \frac{25}{5} = 5$$

$$a_n = a_1 + \left[(n-1) * d\right]$$

$$a_n = 12 + \left[(n-1) * 5\right]$$

$$a_1 = 12 + \left[(1-1) * 5\right] = 12$$

$$a_2 = 12 + \left[(2-1) * 5\right] = 17$$

$$a_3 = 12 + \left[(3-1) * 5\right] = 22$$

$$a_4 = 12 + [(4 - 1) * 5] = 27$$

$$a_5 = 12 + [(5 - 1) * 5] = 32$$

$$a_6 = 12 + [(6 - 1) * 5] = 37$$

## C.2.4 SUMA DE N TÉRMINOS CONSECUTIVOS

Pasamos a determinar la suma de n términos consecutivos aplicando la definición de una progresión aritmética donde cada término es igual al anterior más la diferencia:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + [a_1 + (2 * d)] + ... + [a_1 + [(n - 2) * d]] + [a_1 + [(n - 1) * d]]$$

También podemos dar la vuelta a la definición y comenzar por el final. De esta forma cada término será el anterior menos la diferencia:

$$Suma = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_2 + a_1$$

$$Suma = a_n + (a_n - d) + [a_n - (2 * d)] + ... + [a_n - [(n - 2) * d]] + [a_n - [(n - 1) * d]]$$

Sumamos ahora las dos expresiones:

$$\begin{array}{rl} & S_n = a_1 + (a_1 + d) + [a_1 + (2 * d)] + ... + [a_1 + [(n - 2) * d]] + [a_1 + [(n - 1) * d]] \\ + & S_n = a_n + (a_n - d) + [a_n - (2 * d)] + ... + [a_n - [(n - 2) * d]] + [a_n - [(n - 1) * d]] \\ \hline & 2 * S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) \end{array}$$

Observe el lector que el término $(a_1 + a_n)$ se repite n veces:

$$2 * S_n = (a_1 + a_n) * n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) * n}{2}$$

***Ejemplo:***

*Suma los primeros 500 números pares:*

La progresión será 2, 4, 6, 8,10,…Su término general será la siguiente expresión:

$$a_n = a_1 + [(n - 1) * d]$$

$$a_n = 2 + [(n - 1) * 2]$$

El término $a_{500}$ será:

$$a_{500} = 2 + [(500 - 1) * 2] = 1.000$$

La suma se calculará de la siguiente forma:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) * n}{2}$$

$$S_{500} = \frac{(2 + 1.000) * 500}{2} = 250.500$$

# C.3 PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

## C.3.1 CONCEPTO

Una progresión geométrica es una sucesión de números donde cada uno de ellos (excepto el primero) se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad constante denominada *razón* y representada por la letra *r*.

***Ejemplo:***

*Son ejemplos de progresiones geométricas:*

- 5, 10, 20, 40, 80, 160,... es un progresión geométrica con r = 2
- 100, 150, 225, $\frac{675}{2}$, $\frac{2.025}{4}$, ... es un progresión geométrica con $r = \frac{3}{2}$
- 3, 9, 27, 81, 243, 729,... es un progresión geométrica con r = 3

## C.3.2 TÉRMINO GENERAL

Conocido el primer término y la razón, podemos aplicar la definición de la progresión geométrica para deducir el término general:

$$a_2 = a_1 \ast r$$

$$a_3 = a_2 \ast r = a_1 \ast r \ast r = a_1 \ast r^2$$

$$a_4 = a_3 \ast r = a_1 \ast r^2 \ast r = a_1 \ast r^3$$

$$a_5 = a_4 \ast r = a_1 \ast r^3 \ast r = a_1 \ast r^4$$

$$\ldots$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} \ast r = a_1 \ast r^{n-3} \ast r = a_1 \ast r^{n-2}$$

$$a_n = a_{n-1} \ast r = a_1 \ast r^{n-2} \ast r = a_1 \ast r^{n-1}$$

El término general se podrá expresar como:

$$a_n = a_1 \ast r^{n-1}$$

***Ejemplo:***

*Determina el término general de la progresión 3, 6, 12, 24, 48….:*

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 6$$

$$a_2 = a_1 \ast r$$

$$6 = 3 \ast r$$

$$r = \frac{6}{3} = 2$$

$$a_n = 3 \ast 2^{n-1}$$

***Ejemplo:***

*Determina los cuatro primeros términos de una progresión con $a_1 = 4$ y $r = 3$:*

$$a_n = a_1 * r^{n-1}$$

$$a_n = 4 * 3^{n-1}$$

$$a_1 = 4 * 3^0 = 4$$

$$a_2 = 4 * 3^1 = 12$$

$$a_3 = 4 * 3^2 = 36$$

$$a_4 = 4 * 3^3 = 108$$

***Ejemplo:***

*Determina el término general de una progresión con $a_5 = 625 / 27$ y $r = 5 / 3$:*

$$a_n = a_1 * r^{n-1}$$

$$a_5 = a_1 * \left(\frac{5}{3}\right)^4$$

$$\frac{625}{27} = a_1 * \frac{625}{81}$$

$$a_1 = \frac{\frac{625}{27}}{\frac{625}{81}} = \frac{81 * 625}{27 * 625} = \frac{81}{27} = 3$$

$$a_n = 3 * \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$$

## C.3.3 INTERPOLACIÓN

También podemos intercalar varios términos entre dos extremos para obtener una progresión geométrica. Despejamos del término general la razón:

$$a_n = a_1 * r^{n-1}$$

$$r^{n-1} = \frac{a_n}{a_1}$$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

***Ejemplo:***

*Interpola cuatro términos entre 6 y 1.458:*

$$a_1 = 6$$

$$a_6 = 1.458$$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

$$r = \sqrt[5]{\frac{1.458}{6}}$$

$$r = \sqrt[5]{243} = 3$$

$$a_n = a_1 * r^{n-1}$$

$$a_n = 6 * 3^{n-1}$$

$$a_1 = 6 * 3^0 = 6$$

$$a_2 = 6 * 3^1 = 18$$

$$a_3 = 6 * 3^2 = 54$$

$$a_4 = 6 * 3^3 = 162$$

$$a_5 = 6 * 3^4 = 486$$

$$a_6 = 6 * 3^5 = 1.458$$

## C.3.4 SUMA DE N TÉRMINOS CONSECUTIVOS

Pasamos a determinar la suma de n términos consecutivos aplicando la definición de una progresión geométrica donde cada término es igual al anterior por la razón:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_1 + a_1 * r + a_1 * r^2 + ... + a_1 * r^{n-2} + a_1 * r^{n-1}$$

Ahora multiplicamos la suma por la razón:

$$S_n * r = a_1 * r + a_1 * r^2 + a_1 * r^3 + ... + a_1 * r^{n-1} + a_1 * r^n$$

Restamos la primera de la segunda expresión con la consiguiente eliminación de términos:

$$\begin{array}{r} S_n * r = a_1 * r + a_1 * r^2 + a_1 * r^3 + ... + a_1 * r^{n-1} + a_1 * r^n \\ - \quad S_n = a_1 + a_1 * r + a_1 * r^2 + ... + a_1 * r^{n-2} + a_1 * r^{n-1} \\ \hline (S_n * r) - S_n = a_1 * r^n - a_1 \end{array}$$

Del resultado de la resta procedemos a aislar $S_n$:

$$(S_n * r) - S_n = a_1 * r^n - a_1$$

$$S_n * (r - 1) = a_1 * r^n - a_1$$

$$S_n = \frac{a_1 * r^n - a_1}{r - 1}$$

$$S_n = \frac{a_1 * (r^n - 1)}{r - 1}$$

***Ejemplo:***

*Determina la suma de los diez primeros términos de la progresión geométrica conformada por 2 / 3, 1, 3 / 2, 9 /4, 27 / 8,...:*

$$a_1 = \frac{2}{3}$$

$$a_2 = 1$$

$$r = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{1 * 3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_n = \frac{a_1 * \left(r^n - 1\right)}{r - 1}$$

$$S_{10} = \frac{\frac{2}{3} * \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{10} - 1\right)}{\frac{3}{2} - 1} = 75{,}5533854$$

## C.3.5 SUMA DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA DECRECIENTE

Hasta ahora en todos los ejemplos de progresión geométrica que hemos visto se verificaba que la razón era positiva y mayor que 1 dando lugar a una sucesión de números creciente. Pero, ¿qué ocurre si la razón es positiva pero menor que la unidad?

Calculemos los cinco primeros términos para una progresión cuyo primer término es 6 y la razón es 0,5:

$$a_n = a_1 * r^{n-1}$$

$$a_n = 6 * 0{,}5^{n-1}$$

$$a_1 = 6 * 0{,}5^0 = 6$$

$$a_2 = 6 * 0{,}5^1 = 3$$

$$a_3 = 6 * 0{,}5^2 = 1{,}5$$

$$a_4 = 6 * 0{,}5^3 = 0{,}75$$

$$a_5 = 6 * 0{,}5^4 = 0{,}375$$

Podemos comprobar como los términos decrecen y se aproximan a cero, cosa que ocurre en todas las progresiones geométricas decrecientes.

Calculamos la suma de una progresión geométrica decreciente a partir de la expresión conocida:

$$S_n = \frac{a_1 * \left(r^n - 1\right)}{r - 1}$$

$$S_n = \frac{a_1 * r^n - a_1 * 1}{r - 1}$$

$$S_n = \frac{a_1 * r^n}{r - 1} - \frac{a_1 * 1}{r - 1}$$

Si la razón es un número positivo menor que la unidad, ¿qué ocurre con el factor $r^n$ cuando n crece? A medida que n crece el factor se acerca a cero, así para términos muy grandes la primera parte de la expresión se aproxima a cero:

$$\text{Para n elevados } r^n \;;\; 0\text{, entonces } \frac{a_1 * r^n}{r - 1} \;;\; 0$$

La suma de una progresión geométrica decreciente sería:

$$S_n = -\frac{a_1}{r - 1}$$

$$S_n = \frac{a_1}{-(r - 1)}$$

$$S_n = \frac{a_1}{-r + 1}$$

$$S_n = \frac{a_1}{1 - r}$$

### *Ejemplo:*

*Determina la suma de los veinte primeros términos de la progresión geométrica conformada por 2 /3, 1 /2, 3 /8, 9 /32…:*

$$a_1 = \frac{2}{3}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{1 * 3}{2 * 2} = \frac{3}{4}$$

$$S_n = \frac{a_1}{1 - r}$$

$$S_{20} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{2 * 4}{3 * 1} = \frac{8}{3}$$